

Aerodynamische Berechnung von Tragflügelprofilen.

6. Bericht:

Zur näherungsweise Berechnung der Geschwindigkeit um Tragflächenquerschnitte mit Hilfe einer exakten konformen Abbildung.

Uebersicht: Ein früher in [2] und [3] angegebener Ansatz zur Konstruktion der Funktion, die das Äussere eines Tragflügelprofils in das Kreissäussere abbildet, wird eingehender untersucht und an einigen Beispielen rechnerisch erprobt.

Gliederung:

1. Herleitung der Ausgangsformeln.
2. Lösungsansatz.
3. Einführung von Fourier-Polynomen.
4. Beispiele.
5. Berechnung der Geschwindigkeit.
6. Verschiedene Bemerkungen.
7. Zusammenfassung.

Der Bericht umfasst:

13 Seiten Text
1 Zahlentafel
9 Abbildungen

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GÖTTINGEN E.V.

Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Inst. Leiter

Der Abteilungsleiter

Der Bearbeiter

Alb. Betz

F. Riegels

H. Wittich.

1. Herleitung der Ausgangsformeln.

Das vorgegebene Profil liege in der $z = x + iy$ -Ebene. Die Profilhinterkante sei zu 1 normiert und falle mit der Strecke $0 \leq x \leq 1$ zusammen, Hinterkante in $x = 1$. Die Profilkontur werde in Abhängigkeit von x durch die (zweideutige) Funktion $y = f(x)$ gegeben. Es gibt eine Funktion $z = z(t)$ mit der Entwicklung

$$(1) \quad z = z(t) = c_0 + ct + c_1/t + \dots,$$

die das Profiläussere schlicht und konform in das Gebiet $|t| > 1$ abbildet, wobei $z(\infty) = \infty$ gilt. Wir nehmen im folgenden durchweg an, dass die Entwicklung (1) auch noch für $|t| = 1$ sinnvoll ist, was bei hinreichend glatter Profilkontur sicher richtig ist. Da in (1) noch über eine Drehung der t -Ebene um $t = 0$ verfügt werden kann, dürfen wir noch zusätzlich $z(1) = 1$ fordern. Mit $c = a + ib$, $c_j = a_j + ib_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ und $t = e^{i\varphi}$ folgt aus (1) für die Profilpunkte $P(x, y)$ die Parameterdarstellung

$$(2) \quad \begin{aligned} x(\varphi) &= a_0 + (a+a_1)\cos\varphi - (b-b_1)\sin\varphi + \sum_{j=2}^{\infty} (a_j\cos j\varphi + b_j\sin j\varphi) \\ y(\varphi) &= b_0 + (b+b_1)\cos\varphi + (a-a_1)\sin\varphi + \sum_{j=2}^{\infty} (b_j\cos j\varphi - a_j\sin j\varphi) \end{aligned}$$

Ist die Funktion $y = y(\varphi)$ bekannt, so lassen sich die Fourierkoeffizienten $b_0, (a-a_1), (b+b_1), b_2, a_2, \dots$ nach den Eulerschen Formeln berechnen. Damit sind dann in $x(\varphi)$ alle Fourierkoeffizienten bis auf $a_0, (a+a_1)$ und $(b-b_1)$ bekannt. Zu ihrer Bestimmung kann man nun zusätzliche Bedingungen aufstellen, die sich aus den Voraussetzungen über die Normierung des Profils ableiten lassen. Für die Profilhinterkante gilt nebn $x(\varphi)/\varphi = 0 = x(0) = 1$ noch $\dot{x}(0) = \frac{dx}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0$. Dem Profilpunkt $P(0, y_0)$ entspricht durch $z = z(t)$ ein Kreispunkt $t = e^{i\varphi'}$. Für $\varphi = \varphi'$ muss $x(\varphi)$ den Bedingungen $x(\varphi') = 0$, $\dot{x}(\varphi') = 0$ genügen. Damit erhalten wir die Bedingungen

$$(3') \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, x(\varphi') = 0, \dot{x}(\varphi') = 0.$$

Dem eingeführten Winkel φ' kommt keinerlei prinzipielle Bedeutung zu; er ist lediglich eine für die Rechnung erforderliche Hilfsgrösse, deren Einführung sich aber bei der vorliegenden Auffassung wohl kaum vermeiden lässt. Mit $h(\varphi) = -(a-a_1)\cos\varphi + (b+b_1)\sin\varphi$

+ $\sum_{j=2}^{\infty} (b_j \sin j\varphi + a_j \cos j\varphi)$ schreibt sich $x = x(\varphi)$ in der Form

$$(4) \quad x(\varphi) = a_0 + 2a \cos \varphi - 2b \sin \varphi + h(\varphi)$$

und für (3') erhält man

$$(3) \quad \begin{aligned} a_0 + 2a + h(0) &= 1, & a_0 + 2a \cos \varphi' - 2b \sin \varphi' + h(\varphi') &= 0 \\ -2b + h(0) &= 0, & -2a \sin \varphi' - 2b \cos \varphi' + h(\varphi') &= 0 \end{aligned}$$

mit $\frac{dh}{d\varphi} = \dot{h}(\varphi)$.

Eliminiert man aus (3) die Grössen a_0 , $2a$ und $2b$, so ergibt sich nach einigen Umformungen eine Beziehung zwischen φ' und $h(\varphi')$ in der Form

$$(5) \quad \cotg \frac{\varphi'}{2} = \frac{\dot{h}(\varphi) + \dot{h}(\varphi')}{1 - \dot{h}(\varphi) + \dot{h}(\varphi')}$$

Wegen $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin j\theta \cotg \frac{\theta - \varphi}{2} d\theta = \cos j\varphi$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos j\theta \cotg \frac{\theta - \varphi}{2} d\theta = -\sin j\varphi$ gilt für $h(\varphi)$

$$h(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\theta) \cotg \frac{\theta - \varphi}{2} d\theta$$

Besachtet man $y(\varphi) = f(x(\varphi))$, so kann man (4) umschreiben

$$(J) \quad x(\varphi) = a_0 + 2a \cos \varphi - 2b \sin \varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \cotg \frac{\theta - \varphi}{2} d\theta$$

Diese Formeln gelten unter der Annahme, dass die Funktion $z=z(t)$ die geforderte Abbildung leistet. Bei einer vorgelegten Abbildungsaufgabe muss man nun versuchen, aus dem gegebenen $f(x)$ die Entwicklungskonstanten in (1) zu bestimmen, oder die Grösse x als Funktion des Kreiswinkels zu berechnen. Es ist naheliegend, zur Lösung dieser Aufgabe auf die angegebenen Formeln zurückzugreifen.

2. Lösungsansatz.

Der Aufbau von (4) oder von (J) führt sofort zu folgendem Lösungsansatz. Mit einer Näherungslösung $x_0(\varphi)$ bilden wir

$h_1(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0(\theta)) \cotg \frac{\theta - \varphi}{2} d\theta$ und bestimmen nach Berechnung des Hilfsinkels φ' die noch unbekannten Beiwerte $a_0^{(1)}$, $a^{(1)}$ und $b^{(1)}$.

Mit der so gewonnenen Funktion $x_1(\varphi) = a_0^{(1)} + 2a^{(1)} \cos \varphi - 2b^{(1)} \sin \varphi + h_1(\varphi)$ wird in derselben Weise $x_2(\varphi)$ berechnet u.s.w. Diese Methode wurde an mehreren Profilen versucht. Zur Auswertung des Integrals

$h_n(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_{n-1}(\alpha)) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha$ wurden die in [6] angegebenen Tabellen herangezogen, die $h_n(\varphi)$ unmittelbar für die Stellen $\varphi = \frac{\pi}{18}$ liefern. Mit $x_0 = x_0(\varphi)$ bestimmt man $h_1(\varphi)$ und besorgt sich dann durch graphische oder numerische Differentiation $h_1(\varphi)$ für φ_{16} bis φ_{20} . Der Hilfswinkel φ_1 wird dann durch den Schnitt der beiden Kurven $\xi = \cotg \varphi/2$, $\xi = \frac{h(\varphi) + h(\varphi)}{1 - h(\varphi) + h(\varphi)}$ geliefert. Daraus berechnet sich $x_1(\varphi)$ u.s.w. Die entsprechenden Rechnungen zeigten nun, dass die Folge $x_n(\varphi)$ nicht konvergiert oder zumindest so schlecht konvergiert, dass man praktisch nicht damit rechnen kann. Da die Folge der x_n aber abwechselnd zu grosse und zu kleine Werte ergaben, lag es nahe, die Iteration in folgender Weise abzuändern.^{*)} Aus $x_0(\varphi)$ berechnet man $x_1(\varphi)$ und bildet damit wie oben $x_2(\varphi)$. Mit $\bar{x}_2(\varphi) = \frac{x_1 + x_2}{2}$ findet man $x_3(\varphi)$. Mit $x_3 = \frac{\bar{x}_2 + x_3}{2}$ ebenso x_4 usw. Diese durch Mittelbildung gewonnene Folge $\bar{x}_n(\varphi)$ erwies sich in den bisher behandelten Fällen für die praktische Rechnung als brauchbar.

3. Einführung von Fourier-Polynomen.

Die Berechnung der Funktionen $h_n(\varphi)$ kann man natürlich auch durch Anwendung harmonischer Analyse und Synthese leisten. Dabei muss man sich ebenso wie bei den in [6] angegebenen Tabellen auf eine endliche Anzahl von Gliedern beschränken, die zu behandelnden Funktionen also durch trigonometrische Polynome ersetzen. Zur Berechnung von $h_n(\varphi)$ bestimmt man durch harmonische Analyse der Funktion $f(\bar{x}_{n-1}(\varphi))$ ein Näherungspolynom $T(\varphi)$ und bildet dann $h_n(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\alpha) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha$. Dieser Ansatz bewirkt, dass wir uns auf Abbildungsfunktionen der Form

$$(1') \quad z = z(t) = c_0 + ct + \frac{c_1}{t} + \dots + \frac{c_n}{t^n}$$

beschränken. Mit diesen speziellen Funktionen ist es nun i.a. nicht möglich, den Kreis $|t| = 1$ in den beliebig gegebenen Profilmriss abzubilden. Man kann vielmehr nur erwarten, dass bei passender Wahl der Konstanten c, c_j als Kreisbild eine Kurve entsteht, die nicht sehr stark von der gegebenen Profilkontur abweicht, falls man in (1') eine genügende Zahl von Gliedern berücksichtigt, also n hinreichend gross wählt. Aus rein rechnerischen Gründen setzen wir fest, dass c_n rein imaginär sein soll, also $a_n = 0$ gilt.

^{*)} Nach einem Vorschlag von Herrn E. Krahn.

Mit der Funktion $\bar{x}_{\nu-1}(\varphi)$ ($\nu = 1, 2, \dots$; $\bar{x}_0(\varphi) = x_0(\varphi)$) bilden wir $y_\nu(\varphi) = f(\bar{x}_{\nu-1}(\varphi))$. Die Koeffizienten des die Funktion $y_\nu(\varphi)$ approximierenden trigonometrischen Polynoms $T_n(\varphi) = b_{\nu 0} + (a_\nu - a_{\nu 1}) \sin \varphi + (b_\nu + b_{\nu 1}) \cos \varphi + \sum_{j=2}^{n-1} (b_{\nu j} \cos j\varphi - a_{\nu j} \sin j\varphi) = B_0 + B_1 \cos \varphi + A_1 \sin \varphi + \sum_{j=2}^{n-1} (B_j \cos j\varphi - A_j \sin j\varphi)$ sind eindeutig durch die Forderung bestimmt, dass für die $m = 2n$ Argumentwerte $\varphi_\mu = \frac{\pi}{n} \mu$ die Gleichungen $T_n(\varphi_\mu) = y_\nu(\varphi_\mu) = y_{\nu\mu}$ gelten sollen. Die $2n$ Fourierkoeffizienten lassen sich durch die $y_{\nu\mu}$ leicht in folgender Form ausdrücken:

$$(6) \quad \begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m y_{\nu\mu}, & B_\beta &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m y_{\nu\mu} \cos \beta \frac{\pi}{n} \mu \\ B_n &= \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m (-1)^\mu y_{\nu\mu}, & A_\beta &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m y_{\nu\mu} \sin \beta \frac{\pi}{n} \mu, \quad \beta = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Dann lautet $h(\varphi)$

$$(7) \quad h(\varphi) = -A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi + A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \dots + A_{n-1} \cos (n-1)\varphi + B_{n-1} \sin n\varphi$$

Die weitere Rechnung verläuft wie unter 1 und 2.

Wir wenden diese Formeln nur für den Fall $n = 8$ an, um einen bequemen Vergleich mit ähnlichen Rechnungen¹⁾ von F. Ringleb [4] durchführen zu können. Die Auswertung der in (6) vorkommenden Summen lässt sich im Anschluss an Runge durch Falten der Periode erheblich vereinfachen. Für den vorliegenden Fall $n = 8$ ergibt sich das in Tafel 1 angegebene Rechenschema.

4. Beispiele.

Nach dem zuletzt angegebenen Verfahren wurden die Profile

a) NACA 0030-1.130

b) NACA 0018-1.130

behandelt. Ausgangsnäherung war in beiden Fällen die Funktion $x_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$. Bei symmetrischen Profilen ist die Rechenarbeit erheblich geringer als bei den gewölbten Profilen, weil alle $b_j = 0$ sind und die Hilfswinkelbestimmung wegfällt. Gerechnet wurde bei a) bis $x_5(\varphi)$. Bild 1 zeigt in 5-facher Ueberhöhung das Ausgangs- und Näherungsprofil. Ausserdem sind einige Punkte eingetragen, wie sie sich nach fünf Näherungen ohne Mittelbildung ergeben. Der Nasenradius des Näherungsprofils errechnet sich nach der

1) Die kurze Angabe des Rechenverfahrens in [2] scheint Herrn F. Ringleb entgangen zu sein, obschon er unseren Bericht [2] zitiert. Man merkt sofort, dass das bei F. Ringleb in [4] entwickelte "neue Verfahren" für symmetrische Profile mit dem in [2] skizzierten völlig übereinstimmt.

Formel

(7)

$$\rho = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\dot{y}^2(\varphi)}{|\ddot{x}(\varphi)|}$$

wegen $\dot{y}(\pi) = -(a-a_1) - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 + 5a_5 - 6a_6 + 7a_7$, $\ddot{x}(\pi) = (a+a_1) - 4a_2 + 9a_3 - 16a_4 + 25a_5 - 36a_6 + 49a_7$ mit den angegebenen Koeffizienten zu $\rho = 0,0901$, während der Nasenradius des gegebenen Profils $\rho = 0,3^2 \cdot 1,1 = 0,099$ ist.

Bei dem Beispiel b) wurde die Rechnung bis $x_3(\varphi)$ durchgeführt. (Abb. 2). Für den Krümmungsradius an der Nase berechnet man $\rho = 0,0332$ statt $\rho = 0,18^2 \cdot 1,1 = 0,0356$. Dieses Profil wurde von G. Rossner ²⁾ behandelt und zwar als Beispiel eines Profils, das sich durch seine Profile mit vier frei wählbaren geometrischen Parametern recht gut approximieren lässt. Für die Funktion, die das Gebiet $|z/a| > 1$ in das Profilaussere abbildet, setzt G. Rossner an

$$z/a = k_0 + k_1 a/\xi + k_2 (a/\xi)^2 + \dots,$$

Die Entwicklungskoeffizienten k_j drücken sich gemäss [4] Formel (42) durch vier theoretische Parameter b_1, b_2, b_3 und n aus, deren Zahlenwerte in [5] Seite I 151 angegeben sind. Bezieht man die Formeln von Rossner auf die von uns gewählte Normierung und rechnet die Koeffizienten k_j entsprechend um, so erhält man $z = A_0 + At + A_1/t..$ wobei die ersten Beiwerte lauten

$A_0 = 0,4761$ (0,4775)	$A_3 = 0,0026$ (0,0027)
$A_1 = 0,2883$ (0,2888)	$A_4 = 0,0019$ (0,0011)
$A_2 = 0,2076$ (0,2079)	$A_5 = 0,0008$ (0,0005)
$A_6 = 0,0210$ (0,0209)	

Zum Vergleich sind in der Klammer die von uns berechneten Werte noch einmal angeführt. Die Koeffizienten stimmen i.a. gut überein. Die Abweichungen erklären sich, von den Aufrundungsfehlern abgesehen, durch die Tatsache, dass das Rossnersche Näherungsprofil einen vorgegebenen Hinterkantenwinkel besitzt, während bei unserem Ansatz eine solche Bedingung i.a. nicht erfüllt werden kann.

Zum Vergleich eignen sich naturgemäss recht gut Joukowski-Profile mit abgerundeter Hinterkante. Sie entstehen aus dem Kreis

2, Vgl. G. Rossner [5]

$|\tau + as_1| = R = a(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ durch $\xi = \tau + \frac{a^2}{\tau}$ oder mit $\tau = Rt - x_1$ durch $\xi = Rt - x_1 + \frac{a^2}{Rt - x_1}$ aus dem Kreis $|t| = 1$. ε_1 und ε_2 haben dieselbe Bedeutung wie in [1]. Dafür kann man schreiben

$$\begin{aligned} \xi/a &= (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)t - \varepsilon_1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)t - \varepsilon_1} = kt - \varepsilon_1 + \frac{1}{kt - \varepsilon_1} \\ &= -\varepsilon_1 + kt + \frac{1}{kt} + \frac{\varepsilon_1}{k^2} \cdot \frac{1}{t^2} + \dots + \frac{\varepsilon_1}{k^n} \cdot \frac{1}{t^n} + \dots \end{aligned}$$

Wir betrachten den von Schlichting-Ulrich in [1] behandelten Fall $\varepsilon_1 = 0,090$, $\varepsilon_2 = 0,057$, $k = 1.147$. Es gilt $\xi(1)/a = 2,003$, $\xi(-1)/a = -2,045$. Damit erhält man bei der von uns gewählten Normierung die Abbildungsfunktion

$$z = z(t) = \frac{\xi/a + 2,045}{4,048} = \frac{1}{4,048} (2,045 - \varepsilon_1 + kt + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{t} + \dots)$$

oder

$$\begin{aligned} x = x(\varphi) &= 0,4830 + 0,247 \left\{ (k+1/k) \cos \varphi + \frac{\varepsilon_1}{k^2} \cos 2\varphi + \frac{\varepsilon_1^2}{k^3} \cos 3\varphi + \dots \right\} \\ y = y(\varphi) &= 0,247 \left\{ (k-1/k) \sin \varphi - \frac{\varepsilon_1}{k^2} \sin 2\varphi - \frac{\varepsilon_1^2}{k^3} \sin 3\varphi - \dots \right\} \end{aligned}$$

Die ersten Koeffizienten in dieser Entwicklung $z = z(t) = c_0 + ct + c_1/t + \dots$ haben die Werte

$c_0 = 0,4830$	$c_3 = 0,0013$
$c_1 = 0,2833$	$c_4 = 0,0001$
$c_{-1} = 0,2154$	$c_5 = 0$
$c_2 = 0,0168$	

Vernachlässigt man in den Reihen für $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ die Glieder $c_5 \cos 5\varphi, \dots$, so begeht man einen Fehler, der höchstens 10^{-5} ist. Unter Benützung der in [1] angegebenen Profilkordinaten wurden nach dem dargestellten Verfahren die ersten acht Koeffizienten berechnet. Nach vier Iterationsschriften ergaben sich die Werte

$c_0 = 0,4831$	$c_3 = 0,0015$
$c_1 = 0,2834$	$c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$
$c_{-1} = 0,2151$	
$c_2 = 0,0169$	

Mit diesen Zahlenwerten findet man für die Krümmungsradien an der Nase bzw. an der Hinterkante $\rho_N = 0,0214$ bzw. $\rho_H = 0,0016$; die exakten Werte sind $\rho_N = 0,0218$ und $\rho_H = 0,0014$. (Abb. 3)

Es soll nun noch kurz gezeigt werden, dass bei den hier behandelten Beispielen die mit den errechneten Koeffizienten gebildeten Funktionen $z(t) = c_0 + ct + c_1/t + \dots + c_8/t^8$ das Gebiet $|t| > 1$ tatsächlich auch schlicht abbilden. Dazu genügt hier der Nachweis, dass $\frac{dz}{dt} \neq 0$ ist für $|t| > 1$. Es ist $\frac{dz}{dt} = c - c_1/t^2 - \dots - 8c_8/t^9 = c/t^9 \{ (c_1/c)t^7 - \dots - 8c_8/c \} = c/t^9 \{ t^7 + c_2t^6 + c_3t^5 + \dots + c_8 \} = c/t^9 \cdot P(t)$. Da ausserhalb des Einheitskreises c/t^9 für alle endlichen t von Null verschieden ist, braucht nur $P(t) \neq 0$ für $|t| > 1$ bewiesen zu werden. Zu diesem Nachweis kann man oft mit Vorteil den folgenden Satz benutzen: Ist t_0 eine beliebige Nullstelle des Polynoms $P_n(t) = t^n + c_1t^{n-1} + \dots + c_n$, so ist t_0 nicht grösser als die einzige positive Nullstelle τ des Polynoms $Q(t) = t^n - c_1t^{n-1} - \dots - c_n$, also $|t_0| \leq \tau$. Diese einfache Regel führt bei den behandelten Beispielen ohne Mühe zum Ziel. Es ist nämlich dort $Q(0) < 0, Q(1) > 0$. Mithin liegt die einzige positive Nullstelle von $Q(t)$, zwischen 0 und 1. Nach dem angegebenen Satz haben alle Wurzeln t_j von $P(t) = 0$ einen Betrag < 1 , w.z.b.w.

Die Berechnung der Geschwindigkeit an einem gewölbten Profil erfordert sehr viel mehr Rechenarbeit. Zunächst muss man, um den asymmetrischen Verlauf des gegebenen Profiles einigermaßen zu erfassen, das n in (1') hinreichend gross wählen. Verschiedene Versuche in dieser Richtung zeigten, dass z.B. bei dem NACA-Profil 230-12 $n = 8$ nicht mehr ausreicht. Nach (3) ist der Koeffizient $2b$ in $x(\varphi) = a_0 + 2a \cos \varphi - 2b \sin \varphi + h(\varphi)$ durch $\dot{h}(0)$ gegeben. Zur Bestimmung des Hilfswinkels φ' braucht man bei jedem Iterationsschritt die Ableitung $\dot{h}(\varphi)$ in der Umgebung von $\varphi = 180^\circ$. Um nun $\dot{h}(\varphi)$ in der Umgebung von $\varphi = 180^\circ$ und für $\varphi = 0$ sauber bestimmen zu können, muss man $h(\varphi)$ hinreichend genau kennen, d.h. man muss $h(\varphi)$ bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 180^\circ$ in Punkten berechnen, die relativ dicht liegen. Benützt man zur Berechnung von $h(\varphi)$ die in [6] angegebenen Tabellen, so bedeutet diese Forderung, dass die über das Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ äquidistant verteilten Interpolationspunkte hinreichend dicht zu wählen sind. Die Wahl $\varphi_j = \frac{\pi}{18}$ dürfte in den meisten Fällen genügen. Der Versuch, mit der

Punktwahl $\frac{\pi}{12}$ auszukommen, scheiterte daran, dass man aus den berechneten Werten $h(\frac{\pi}{12})$ die Grössen $2b$ und φ' nicht mit der für die weitere Rechnung unbedingt erforderlichen Genauigkeit bestimmen konnte.

Bei der vorliegenden Berechnung des Profils NACA 230 12 wurde die $h(\varphi)$ -Bestimmung nach Abschnitt 2 mit den mehrfach erwähnten Tabellen durchgeführt. Der Rechnung lag eine normale Auftragung des Profils über der Tiefe $l = 2m$ zugrunde, aus der bei jedem Iterationsschritt die y -Werte entnommen wurden. Als Ausgangsnäherung diente die Funktion $x_0(\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$. Die zur Bestimmung des Hilfswinkels φ' erforderlichen Ableitungswerte $\dot{h}(\varphi)$ wurden durch numerische Differentiation gewonnen. Nach 5 Iterationsschritten fielen die Punkte $P_5 = (x_5(\varphi), f(\bar{x}_4(\varphi)))$ auf den gegebenen Profilumriss, sodass bei weiterer Rechnung die Annäherung an das gegebene Profil nicht mehr verbessert werden kann. Für $x(\varphi) \approx x_5(\varphi)$ erhält man $x(\varphi) = 0,4843 + 0,5518 \cos\varphi + 0,0089 \sin\varphi + h(\varphi)$. Der Verlauf von $h_1(\varphi)$ und $h_5(\varphi)$ sind zum Vergleich in Abb. 4 dargestellt. Bei den einzelnen Iterationsschritten erhält man für $a_0, 2a, 2b$ und φ' die Werte

	a_0	$2a$	$-2b$	φ'
$x_0(\varphi)$	0,5000	0,5000	00	180°
$x_1(\varphi)$	0,4833	0,5510	0,0083	185°
$x_2(\varphi)$	0,4850	0,5512	0,0089	183°
$x_3(\varphi)$	0,4841	0,5521	0,0089	$183,8^\circ$
$x_4(\varphi)$	0,4842	0,5520	0,0087	$183,4^\circ$
$x_5(\varphi)$	0,4843	0,5518	0,0089	$183,4^\circ$

wobei φ' aus (5) bestimmt worden ist.

5. Berechnung der Geschwindigkeit.

Das Profil möge mit der Geschwindigkeit $w = V e^{i\alpha}$ angeströmt werden; dabei bezeichne α denjenigen Winkel, um den man die posi-

tive x-Achse in mathematisch positivem Sinne drehen muss, damit sie in die Richtung von \mathcal{N} fällt. Ist $F(z) = \phi(z) + i \psi(z)$ das komplexe Potential der allgemeinsten wirbelfreien Strömung im Profilmassern, so ergibt sich die Geschwindigkeit $w = u + iv$ zu $w = \frac{dF}{dz}$. Zur Konstruktion des komplexen Potentials geht man in bekannter Weise von der allgemeinen wirbelfreien Strömung um den Kreiszylinder aus, die sich im Unendlichen auf $w^* = V^* e^{i\alpha^*}$ reduzieren möge. Das zugehörige komplexe Potential $F^*(t)$ lautet

$$(8) \quad F^*(t) = V^* \left(e^{-i\alpha^* t} + \frac{e^{i\alpha^*}}{t} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log t.$$

Mit $t = t(z)$ erhält man $F^*(t) = F^*(t(z)) = F(z)$ und $\bar{w} = \frac{dF}{dz} \frac{dt}{dz}$. Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dF^*}{dt} = V^* e^{-i\alpha^*}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dz}{dt} = |c| e^{i \arg c}$ folgt $\bar{w}(\infty) = V e^{-i\alpha}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dF}{dz} = V^* e^{-i\alpha^*} \frac{e^{-i \arg c}}{|c|}$, also

$$(9) \quad V^* = |c| V, \quad \alpha^* = \alpha - \arg c = \alpha - \alpha_0.$$

Das gesuchte komplexe Potential $F(z)$, das der Bedingung $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dF}{dz} = V e^{-i\alpha}$ genügt, ist mithin von der Form

$$(10) \quad F(z) = |c| V \left(e^{-i(\alpha - \alpha_0) t} + \frac{e^{i(\alpha - \alpha_0)}}{t} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log t, \quad t = t(z)$$

Für den Geschwindigkeitsbetrag $|w|$ am Profil erhält man daraus

$$(11) \quad |w| = 2 |c| V \left| \sin(\varphi - (\alpha - \alpha_0)) + \frac{\Gamma}{4\pi |c| V} \right| \left| \frac{dz}{dt} \right|.$$

Da $\left| \frac{dz}{dt} \right|$ für $t=1$ sehr klein ist - in speziellen Fällen ist die Ableitung dort Null - wird man auch hier wie üblich Γ so bestimmen, dass $-\sin(\alpha - \alpha_0) + \frac{\Gamma}{4\pi |c| V} = 0$ wird, also $\Gamma = 4\pi |c| V \sin(\alpha - \alpha_0)$ wählen. Damit erhält man schliesslich für die Geschwindigkeit am Profil in Abhängigkeit vom Kreiswinkel φ

$$(12) \quad \frac{|w|}{V} = 2 |c| \left| \sin(\varphi - (\alpha - \alpha_0)) + \sin(\alpha - \alpha_0) \right| \frac{1}{\left| \frac{dz}{dt} \right|}$$

Für den Auftrieb A und den Auftriebsbeiwert c_a findet man

$$(13) \quad A = 4\pi \rho |c| V^2 \sin(\alpha - \alpha_0), \quad c_a = c_a(\alpha) = 8\pi |c| \sin(\alpha - \alpha_0).$$

Die Nullauftriebsrichtung ist also durch $\alpha_0 = \arg c$ gegeben. Für das Profil NACA 230-12 gilt $\alpha_0 = -0^\circ 55'$.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit nach (12) muss $\left| \frac{dz}{dt} \right|$ für $t = e^{i\varphi}$ bestimmt werden. Mit $z(e^{i\varphi}) = x(\varphi) + iy(\varphi)$ gilt $\left| \frac{dz}{dt} \right| = \sqrt{\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi)}$.

Die Bestimmung von $\dot{x}(\varphi)$ und $\dot{y}(\varphi)$ wird im allgemeinen graphisch oder numerisch vorgenommen und erfordert bei $\varphi \approx \pi$ einige Aufmerksamkeit. Kennt man jedoch die Fourierentwicklung der Funktionen $x(\varphi)$, $y(\varphi)$, so wird man diese auch bei der Bildung von $\dot{x}(\varphi)$, $\dot{y}(\varphi)$ benutzen. Bei der für die Berechnung von $\dot{x}(\varphi)$, $\dot{y}(\varphi)$ vorzunehmenden harmonischen Synthese macht man mit Vorteil von den Formeln $\cos n(\pi - \varphi) = (-1)^n \cos n\varphi$, $\sin n(\pi - \varphi) = (-1)^{n+1} \sin n\varphi$ Gebrauch.

Die Berechnung von $\left| \frac{dz}{dt} \right|$ bei den hier behandelten symmetrischen Profilen geschah, weil die Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \dots, c_8$ bekannt waren, nach der Formel $\frac{dz}{dt} = c - c_1 e^{-2i\varphi} - 2c_2 e^{-3i\varphi} - \dots - 8c_8 e^{-9i\varphi}$.

Für das Profil NACA 230 12 wurde $\left| \frac{dz}{dt} \right|^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2$ durch numerische Differentiation der bekannten Funktionen $x=x(\varphi)$, $y=y(\varphi)$ bestimmt. (Abb. 6 bis 9).

6. Verschiedene Bemerkungen.

Bei dem angegebenen Verfahren lässt sich nach jedem Iterationsschritt leicht nachprüfen, wie weit die Punkte des jeweils berechneten Näherungsprofils noch von dem vorgelegten abweichen. Im Anschluss an diese Feststellung kommt man sofort zu zwei prinzipiell wichtigen Fragestellungen:

1) Es sei die Zahl der Interpolationspunkte fest vorgegeben. Nach dem j -ten Iterationsschritt erhält man ein Näherungsprofil $(x_j(\varphi), y_j(\varphi))$. Die Bilder der Kreispunkte $e^{i\varphi}$ auf diesem Näherungsprofil seien P_j^i . Unter welchen Bedingungen streben die Punkte P_j^i bei $j \rightarrow \infty$ gegen wohlbestimmte Punkte P^i , die auf dem gegebenen Profil liegen?

2) Kann man bei hinreichend grosser Zahl von Interpolationspunkten ein vorgegebenes Profil schliesslich beliebig genau approximieren?

Eine Antwort auf diese Fragen, deren Erledigung für eine einwandfreie und saubere Begründung des dargestellten Verfahrens unerlässlich ist, können wir noch nicht geben. Dazu muss die Frage der iterativen Auflösbarkeit der Integralbeziehung

$$(J) \quad x(\varphi) = a_0 + 2a \cos \varphi - 2b \sin \varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\alpha)) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha$$

nach $x(\varphi)$ unter den Nebenbedingungen (3') bei gegebenem $f(x)$ geklärt werden. Die praktische Rechnung hat gezeigt, dass die Lösung von (J) auf iterativem Wege ohne Mittelbildung selbst bei einfachen Profilformen nicht immer zu gelingen braucht. Danach ist die in [2] auf Seite I 132 ausgesprochene Vermutung über die Konvergenz des Verfahrens falsch. Der Behauptung von Herrn Ringleb, dass das ohne Mittelbildung angesetzte Iterationsverfahren "stark konvergiert", können wir uns aus dem gleichen Grunde nicht anschliessen. Ob der in [4] Fussnote 3) in Aussicht gestellte Konvergenzbeweis ohne zusätzliche Einschränkungen gelingen wird, erscheint mir nach den Erfahrungen der praktischen Rechnung fraglich. Diese Auffassung wird gestützt durch einige Ergebnisse, die bei der Konvergenzuntersuchung des für die Integralgleichung $g(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + g(\alpha)) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha$ angesetzten Iterationsverfahrens gewonnen wurden [7]. Danach kann man erst bei hinreichend kleinem $\max \left| \frac{df}{d\alpha} \right|$ mit Sicherheit auf die gleichmässige Konvergenz der Folge $g_n(\varphi)$ gegen die Lösungsfunktion $g(\varphi)$ der Integralgleichung schliessen. Bei der vorliegenden Integralbeziehung (J) ist aber $\left| \frac{df}{d\alpha} \right|$ in der Nasengegend gerade sehr gross. Sicherlich wird bei den Fragen 1) und 2) das Verhalten von $\left| \frac{df}{d\alpha} \right|$ eine erhebliche Rolle spielen.

7. Zusammenfassung.

Die Konstruktion der Abbildungsfunktion $z = z(t) = x + iy$ reduziert sich auf die Behandlung der nichtlinearen Integralbeziehung (J) $x(\varphi) = a_0 + 2a \cos \varphi - 2b \sin \varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\alpha)) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha$.

Bei gegebenem Profillumriss $y=f(x)$ ist (J) nach $x=x(\varphi)$ aufzulösen unter den Bedingungen (3^a). Durch einen passenden Iterationsansatz wird eine Näherungslösung von (J) gewonnen, die den rechnerischen Bedürfnissen genügt. Ob bzw. unter welchen Bedingungen das angesetzte Iterationsverfahren konvergiert, konnte nicht entschieden werden. Bei bekannten $x(\varphi)$ lässt sich die Ableitung der Abbildungsfunktion bestimmen und damit auch die gesuchte Geschwindigkeit am vorgegebenen Profil. Die bisher behandelten Beispiele zeigen, dass das Verfahren recht saubere Ergebnisse liefert.

Schrifttum

- [1] Schlichting-Ulrich: Zur Berechnung des Umschlages laminar/turbulent. Jahrb. 1942 d. dtsh. Luftfahrtforsch. S I 8 .
- [2] Riegels-Wittich: Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen. Jahrb. 1942 d. dtsh. Luftfahrtforsch. S I 120.
- [3] Riegels-Wittich: Zur konformen Abbildung beliebiger Profile auf des Kreis und Bestimmung der Druckverteilung in inkompressibler Strömung. AVA-Bericht 42/A/20 .
- [4] F. Ringleb: Iterationsverfahren zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung eines Tragflügelprofils. Jahrb. 1943 d. dtsh. Luftfahrtforsch (Vorabdruck in Techn. Ber. Bd. 10, Heft 11).
- [5] G. Rossner: Ueber eine Klasse von theoretischen Profilen mit vier frei wählbaren geometrischen Parametern. Jahrb. 1942 d. dtsh. Luftfahrtforsch. S I 141 .
- [6] H. Wittich: Bemerkungen zur Druckverteilungsrechnung nach Theodorsen-Garrick. Jahrb. 1941 d. dtsh. Luftfahrtfg. S. I 52
- [7] H. Wittich: Ueber die konforme Abbildung kreisähnlicher Gebiete. Vortrag auf der Tagung d. dtsh. Mathematikervereinigung in Würzburg, Herbst 1943. Erscheint i. Jahresber. d. dtsh. Mathematikervereinigung.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	
y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	
s_8	s_7	s_6	s_5		
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	+
d_0	d_1	d_2	d_3		-

d_1	d_2	d_3	d_4	
d_7	d_6	d_5		
s_1	s_2	s_3	s_4	+
d_1	d_2	d_3		-

Bestimmung der B_v

1.0000	$s_0 + s_2 + s_4$	$s_1 + s_3$	d_0		$s_0 - s_4$		d_0		$s_0 + s_4$	s_2
0,9239				d_1				$-d_3$		
0,7071			d_2			$s_1 - s_3$	$-d_2$			
0,3827			d_3					d_1		
Summe	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
	$16B_0 = R_1 + R_2$	$8B_1 = R_3 + R_4$	$8B_2 = R_5 + R_6$	$8B_3 = R_7 + R_8$						
	$16B_8 = R_1 - R_2$	$8B_7 = R_3 - R_4$	$8B_6 = R_5 - R_6$	$8B_5 = R_7 - R_8$						
									$8B_4 = R_9 - R_{10}$	

Bestimmung der A_v

1,0000		s'_4		d'_2		$-s'_4$	d'_1	d'_3
0,9239	s'_3				s'_1			
0,7071		s'_2	$d'_1 + d'_3$			s'_2		
0,3827	s'_1				$-s'_3$			
Summe	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
	$8A_1 = P_1 + P_2$	$8A_2 = P_3 + P_4$	$8A_3 = P_5 + P_6$					
	$8A_7 = P_1 - P_2$	$8A_6 = P_3 - P_4$	$8A_5 = P_5 - P_6$					
							$8A_4 = P_7 - P_8$	

Tafel 1

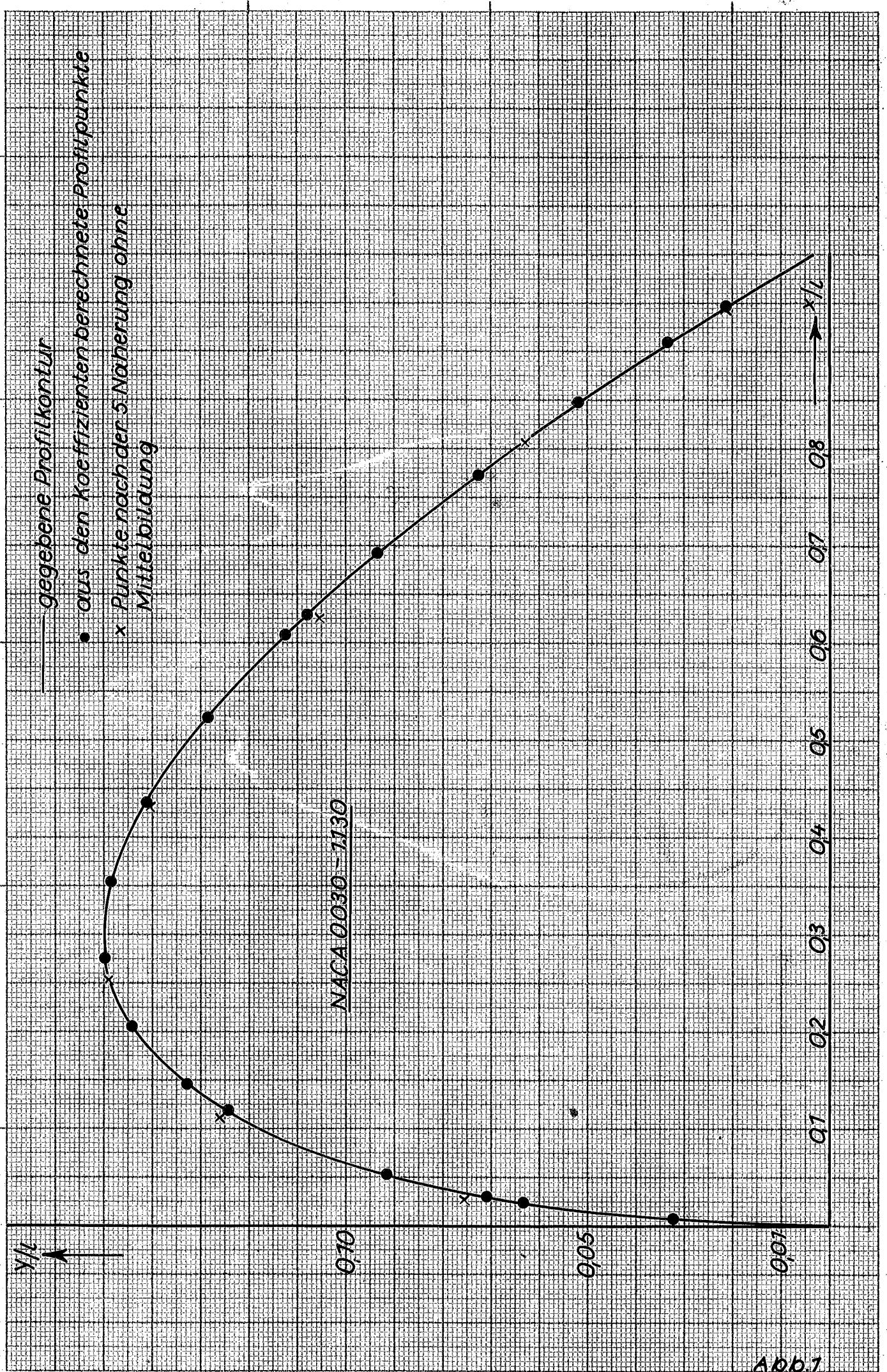


Abb. 7

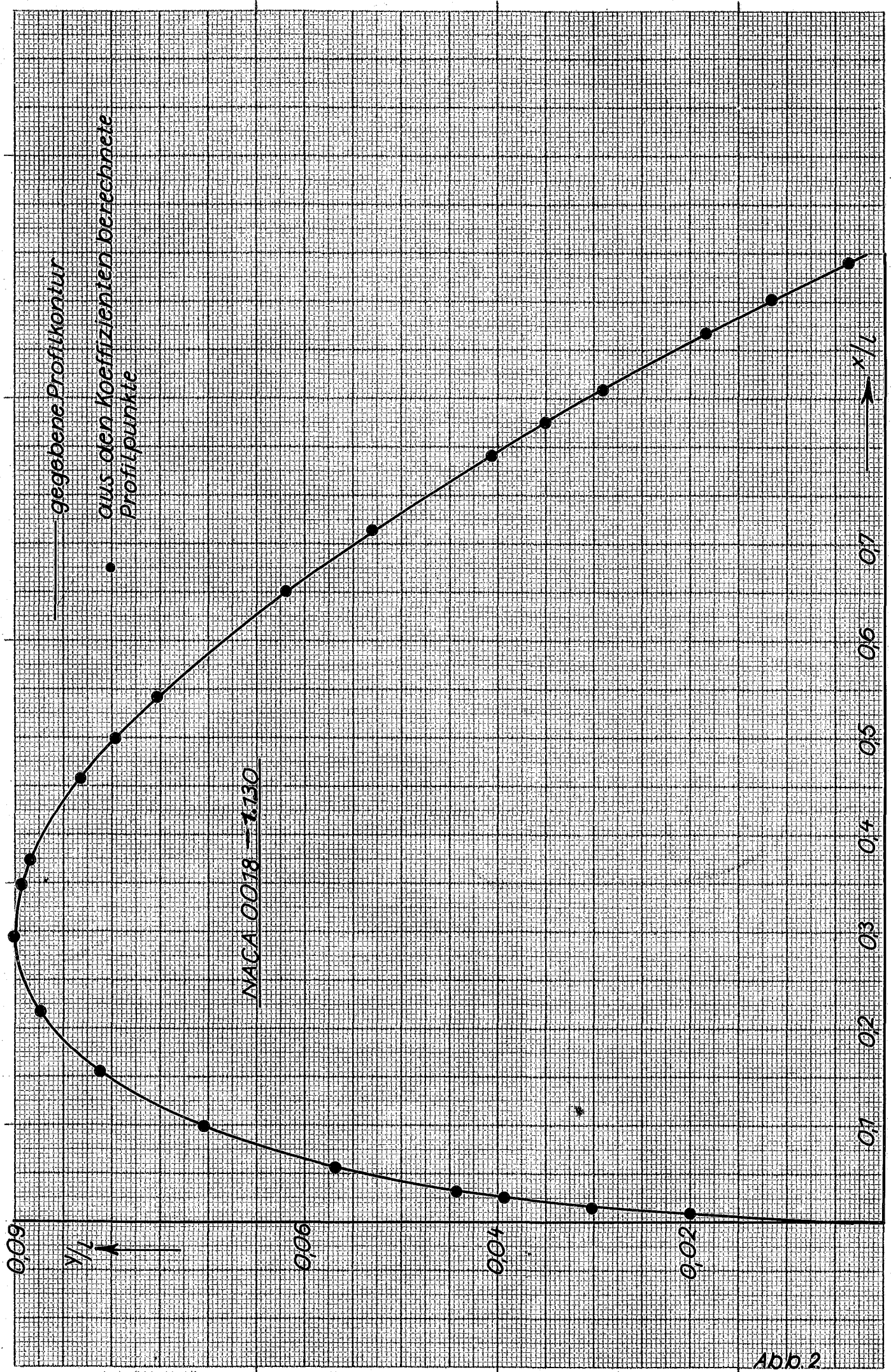
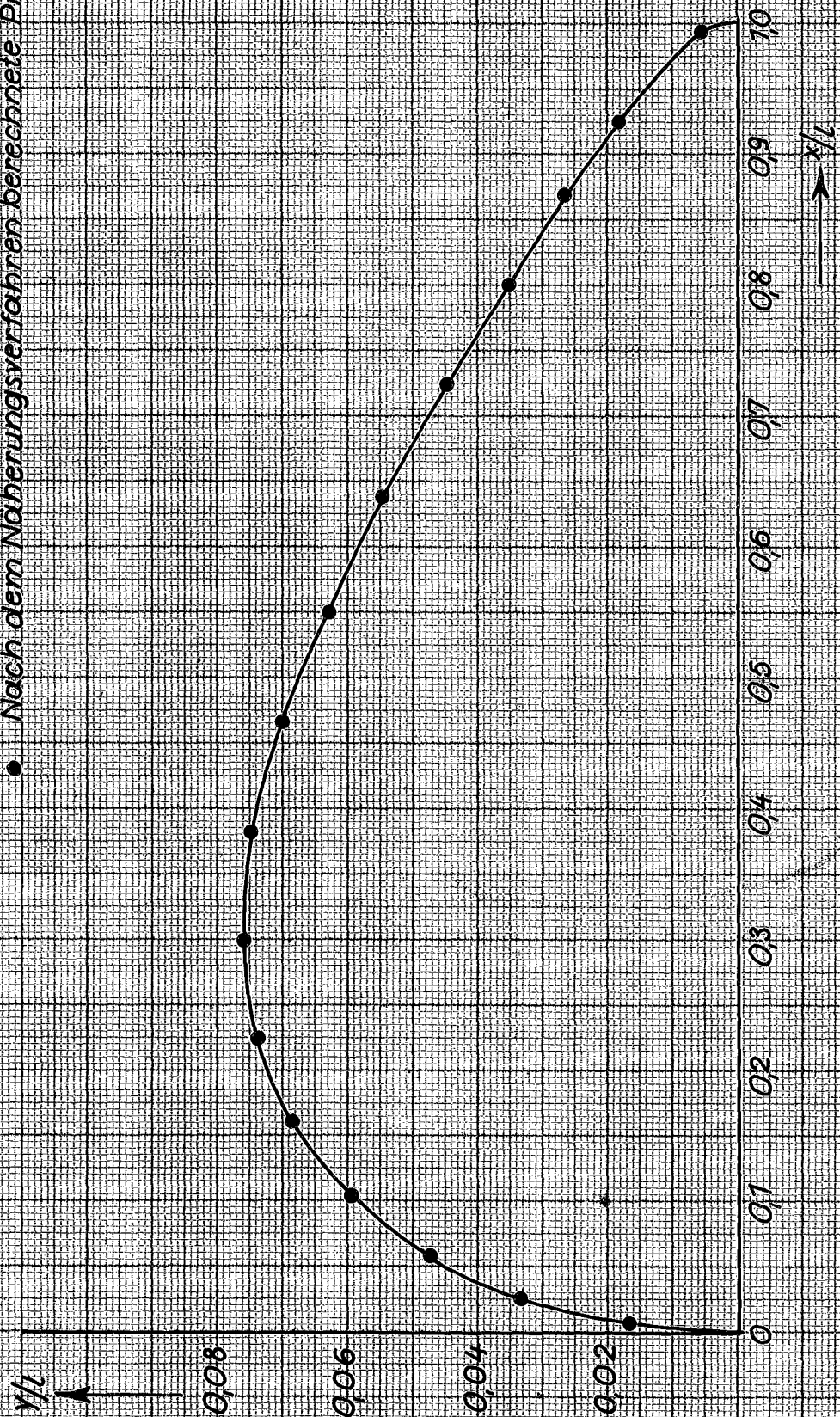


Abb. 2

Joukowski-Profil mit abgerundeter Hinterkante ($\approx 15\%$ Dicke)

— gegebene Profilkontur

• Nach dem Näherungsverfahren berechnete Profilpunkte



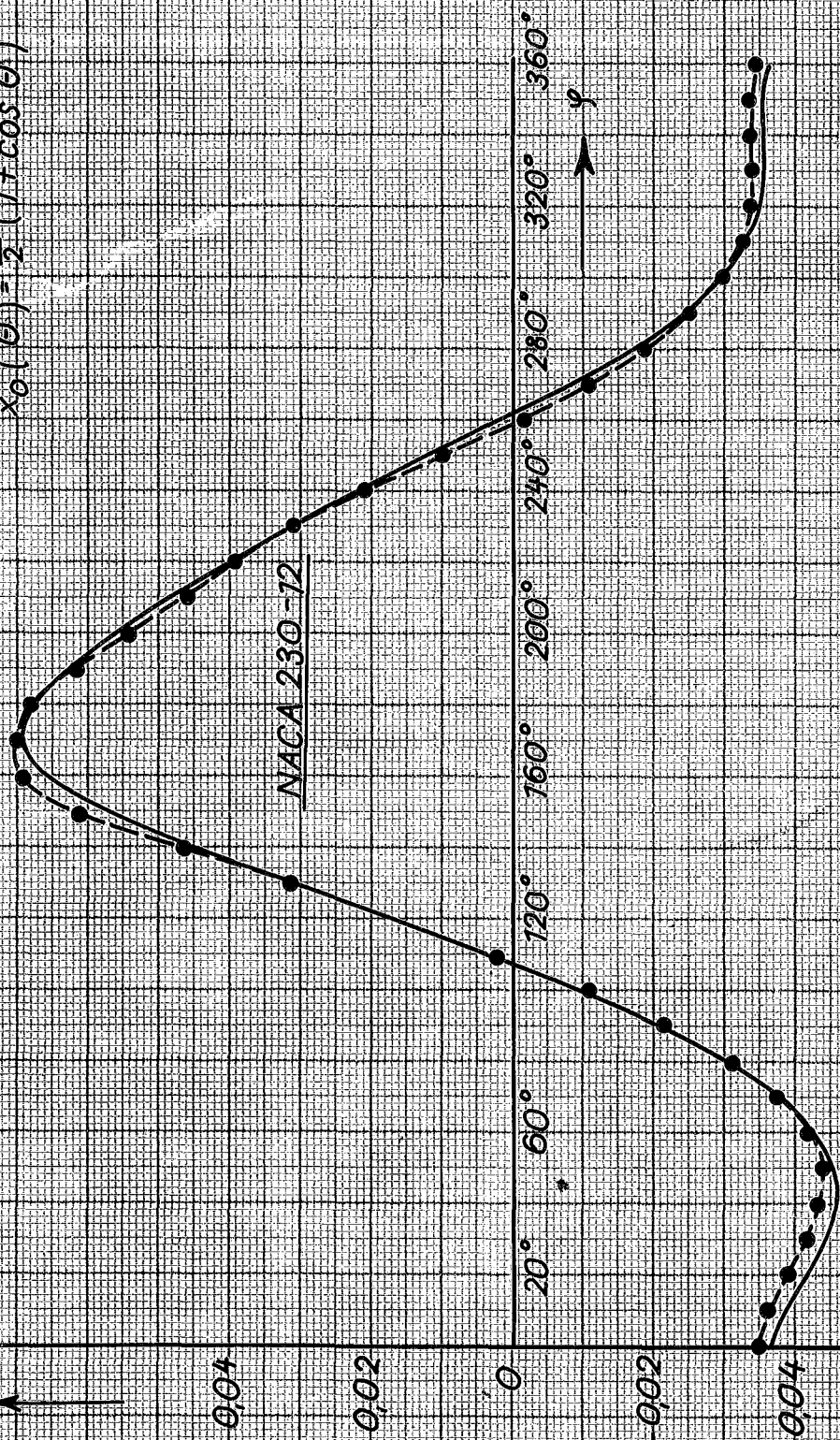
— $h_5(\varphi)$

$$-h_1(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0(\theta)) \cos \frac{\theta - \varphi}{2} d\theta$$

$$x_0(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

$h_5(\varphi)$

NACA 230-12



gegebene Profilkontur

berechnete Profilpunkte

Näherungsprofil nach dem 1 Iterationsschritt

x

y/4

0,08

0,02

NACA 230-12

0,02

0,04

0,06

0,08

0,1

0,2

0,3

0,4

0,5

0,6

0,7

0,8

0,9

1,0

1,1

1,2

Abb. 5

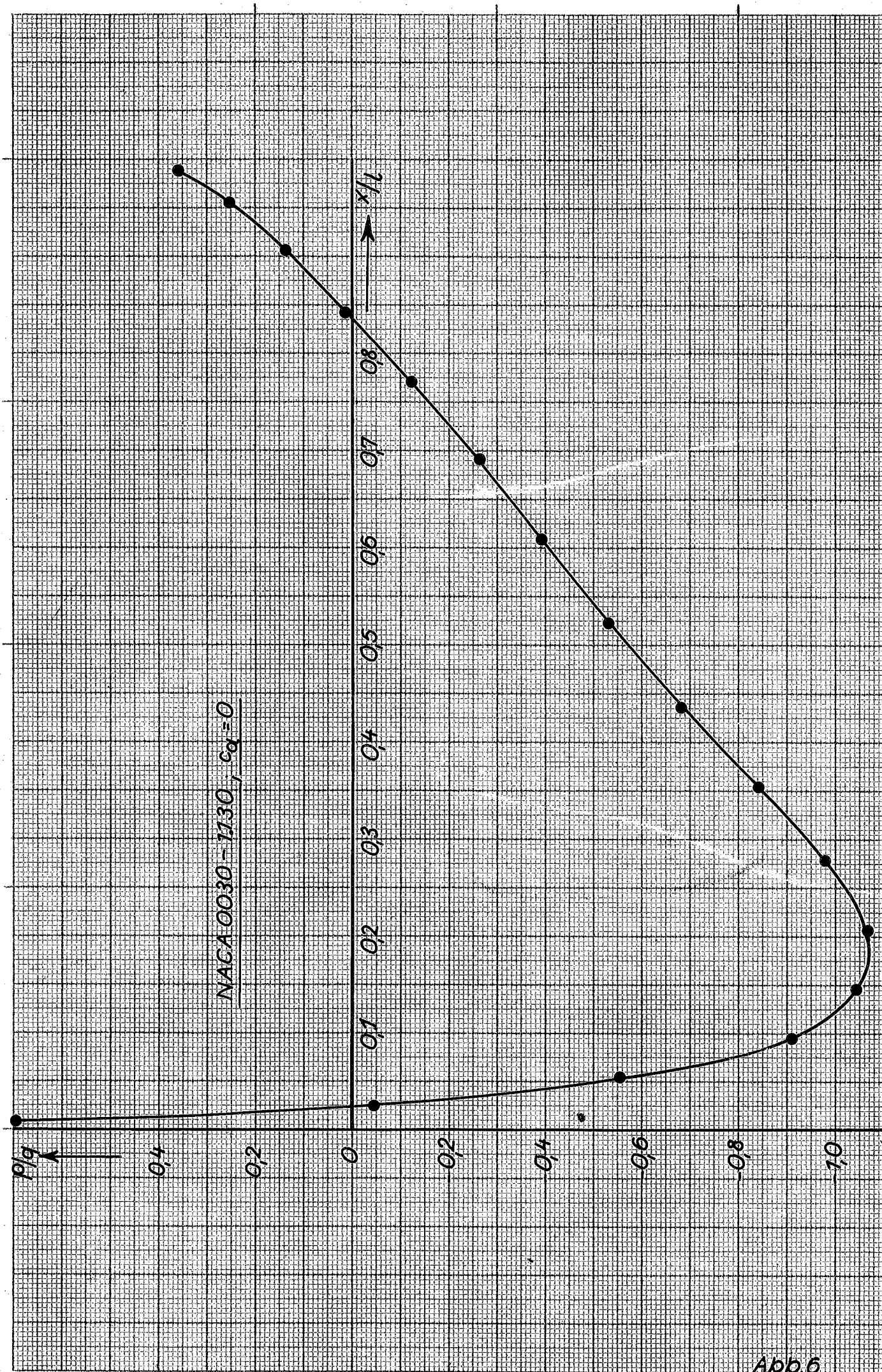


Abb. 6

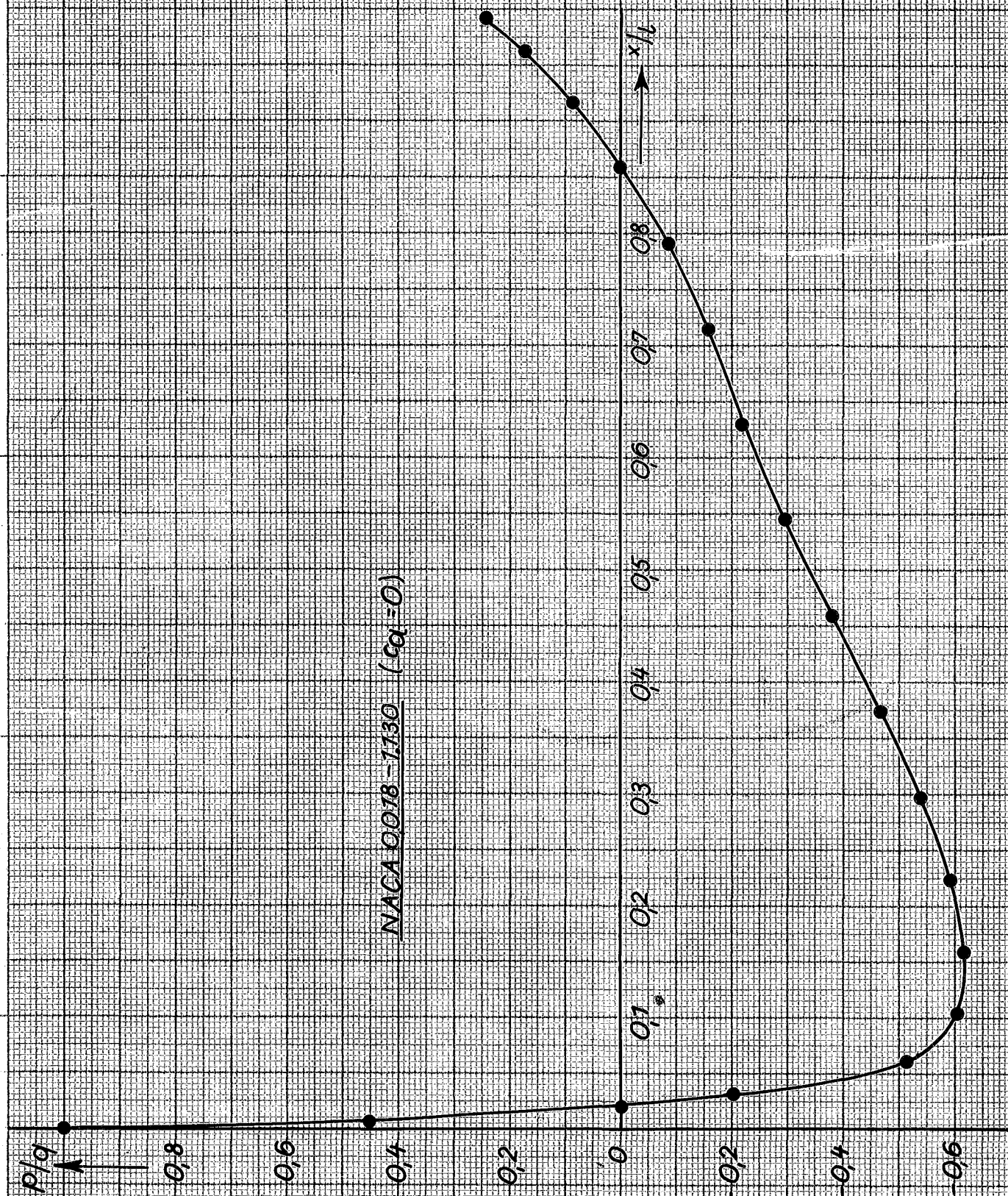


Abb. 7

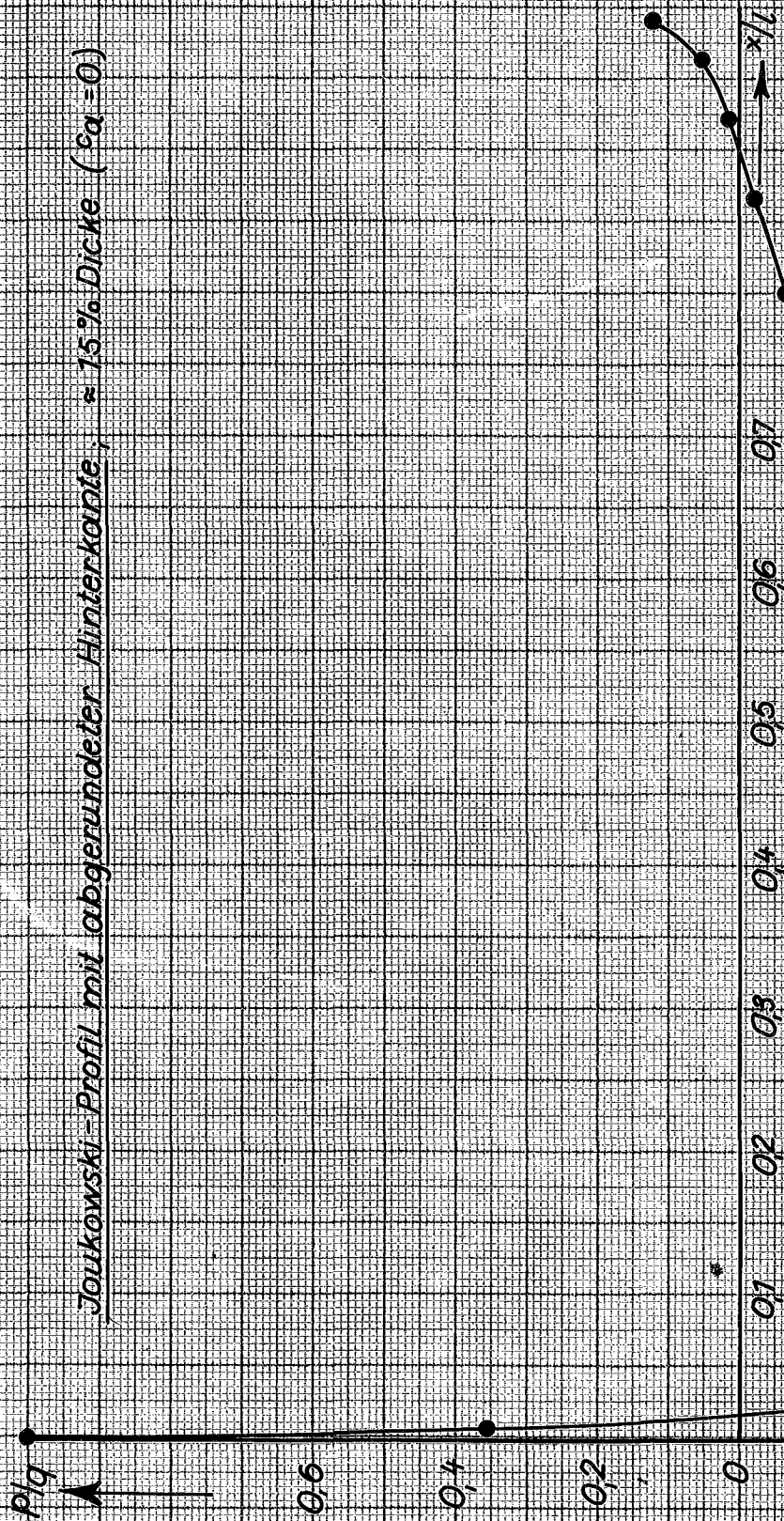


Abb. 8

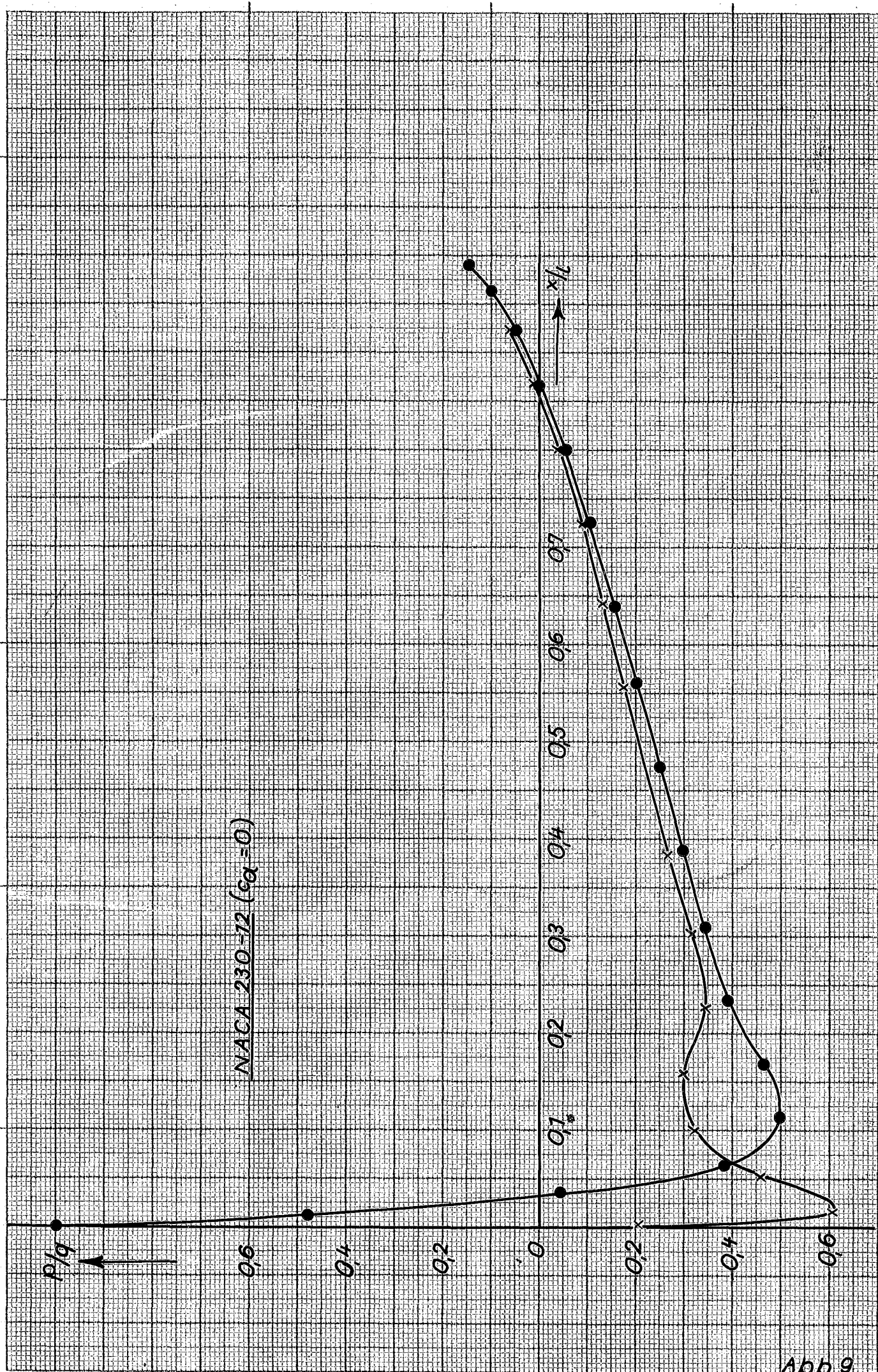


Abb. 9